Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°10 - A rendre le mercredi 16 janvier 2013

« Réduction - systèmes différentiels linéaires »

Nous noterons $\mathcal{B} = \langle (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \rangle$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et désignerons par Id, f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base $\mathcal{B}$ sont respectivement :

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour toutes fonctions u, v, w réelles dérivables sur $\mathbb{R}$, nous désignerons par Φ et Φ' les fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^3$définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \Phi(t) = \big(u(t),\, v(t),\, w(t)\big) \quad ; \quad \Phi'(t) = \big(u'(t),\, v'(t),\, w'(t)\big)$$

Partie 1

1. Soit λ un réel quelconque.
   - Discuter selon les valeurs de λ le nombre de solutions X de l'équation $A\,X = \lambda\,X$.
   - Discuter selon les valeurs de λ le nombre de solutions X de l'équation $B\,X = \lambda\,X$.

   En déduire les valeurs propres des endomorphismes f et g et préciser les dimensions de leurs espaces propres.
2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables ? *Il va de soi que vous devez justifier votre réponse.*
3. Déterminer une base $\mathcal{B}' = \langle \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3, \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, puis une base $\mathcal{B}'' = \langle \varepsilon_1',\, \varepsilon_2',\, \varepsilon_3', \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de g est triangulaire supérieure à cœfficients entiers.
4. Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Explicitez les matrices inversibles $D = P^{-1}AP$ et $T = Q^{-1}BQ$.

Partie 2

Si u, v, w sont trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, nous noterons $(\mathcal{S})$ le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{lcl} u'(t) & = & 5\,u(t) + v(t) - w(t) + e^t \\ v'(t) & = & 2\,u(t) + 4\,v(t) - 2\,w(t) + e^{2\,t} \\ w'(t) & = & u(t) - v(t) + 3\,w(t) - t\,e^t \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système $(\mathcal{S})$ équivaut à l'équation différentielle (E) : $\Phi'(t) = f\big(\Phi(t)\big) + (e^t, e^{2\,t}, -t\,e^t)$.
2. Soient $\big(a(t),\, b(t),\, c(t)\big)$ les coordonnées de $\Phi(t)$ dans la base $\mathcal{B}' = \langle \varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3, \rangle$.
   (a) Montrer que l'équation différentielle (E) équivaut au système :
   $$(\mathcal{S}') \left\{ \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\,a(t) \\ 4\,b(t) \\ 6\,c(t) \end{bmatrix} + P^{-1} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2\,t} \\ -t\,e^t \end{bmatrix} \right.$$
   (b) Déterminer le triplet $\big(a(0),\, b(0),\, c(0)\big)$ de sorte que $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$.
3. Résoudre $(\mathcal{S}')$ avec les conditions initiales $(a(0),\, b(0),\, c(0)$ trouvées précédemment. En déduire la solution de $(\mathcal{S})$ vérifiant les conditions initiales $u(0) = 0$, $v(0) = 0$, $w(0) = 1$.

Partie 3

Si u, v, w sont trois fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}$, nous noterons $(\mathcal{S}_1)$ le système d'équations différentielles suivant :

$$(\mathcal{S}_1) \left\{ \begin{array}{lcl} u'(t) & = & 2\,u(t) + w(t) \\ v'(t) & = & -u(t) + v(t) - w(t) \\ w'(t) & = & u(t) + 2\,v(t) \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système $(\mathcal{S}_1)$ équivaut à l'équation différentielle (E_1) : $\Phi'(t) = g\big(\Phi(t)\big)$.
2. Soient $\big(a(t),\, b(t),\, c(t)\big)$ les coordonnées de $\Phi(t)$ dans la base $\mathcal{B}'' = \langle \varepsilon_1',\, \varepsilon_2',\, \varepsilon_3', \rangle$.

(a) Montrer que l'équation différentielle (E_1) équivaut au système :

$$(\mathcal{S}_1') \quad \left\{ \begin{bmatrix} a'(t) \\ b'(t) \\ c'(t) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{bmatrix} \right.$$

(b) Déterminer le triplet $\big(a(0),\, b(0),\, c(0)\big)$ de sorte que $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 1$.

3. Résoudre $(\mathcal{S}_1')$ avec les conditions initiales $(a(0),\, b(0),\, c(0)$ trouvées précédemment. En déduire la solution de $(\mathcal{S}_1)$ vérifiant les conditions initiales $u(0) = 1$, $v(0) = 2$, $w(0) = 1$.