Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°14 - A remettre le mercredi 8 février 2012

« Etude d'une équation fonctionnelle »

Soit a un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

1. **Un premier cas particulier**

   Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

   (a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

   i. Calculer $f(0)$.

   ii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x.

   iii. En déduire la fonction f.

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

2. **Un second cas particulier**

   Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

   (a) On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

   i. Calculer $f(0)$.

   ii. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, F et e^x.

   iii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et e^x. Calculer $f'(0)$.

   iv. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f''(x)$ en fonction de x, $f'(x)$ et e^x.

   v. Démontrer alors que, pour tout nombre réel x, on a $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

   vi. En déduire la fonction f.

   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\,.$$

3. **Résolution de l'équation homogène**

   Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est l'application nulle. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) **Calcul des dérivées successives de f**

   i. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.

   ii. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

   iii. Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

   iv. En déduire, pour tout nombre entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

   (b) Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a

   $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (c) Soit A un nombre réel strictement positif.

   i. Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que

   $$\forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f(x)| \leq M$$

   et en déduire que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$\forall x \in [-A;A]\,, \qquad |f^{(n)}(x)| \leq M.$$

   ii. Soit x un nombre réel appartenant à $[-A;A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

   et en déduire que $f(x) = 0$.

   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

4. **Étude de l'équation complète**

   Pour cette question, a désigne un nombre réel appartenant à $[-1;1]$ et φ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

   (a) Démontrer que, sous réserve d'existence, il existe une unique application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

   (b) Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f, continues sur $\mathbb{R}$, telles que

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$