Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°8 - A remettre le mardi 22 novembre 2011

« La constante d'Euler - Probabilités »

EXERCICE

Un bovin d'une race donnée est susceptible d'être atteint d'insuffisance rénale qui peut être unilatérale ou bilatérale. On admet que pour cette race, la probabilité d'être atteint d'une insuffisance du rein droit est égale à la probabilité d'être atteint d'une insuffisance du rein gauche et que ces deux affections sont indépendantes. On note p cette probabilité.
On considère les événements suivants :
- M : « l'animal est atteint d'insuffisance rénale »
- D : « l'animal est atteint d'insuffisance rénale du rein droit »
- G : « l'animal est atteint d'insuffisance rénale du rein gauche »
- U : « l'animal est atteint d'insuffisance rénale unilatérale »
- B : « l'animal est atteint d'insuffisance rénale bilatérale »

Leurs événements contraires sont respectivement notés : $\overline{M}$, $\overline{D}$, $\overline{G}$, $\overline{U}$, $\overline{B}$.

1. Calculer, en fonction de p, la probabilité des événements $\overline{D} \cap G$ et $\overline{D} \cap \overline{G}$.
   En déduire l'indépendance des événements $\overline{D}$ et G d'une part, et $\overline{D}$ et $\overline{G}$ d'autre part.
2. Pour un animal quelconque, calculer en fonction de p la probabilité p_0 de n'avoir aucun rein atteint, la probabilité p_1 de n'avoir qu'un seul rein atteint, la probabilité p_2 d'avoir les deux reins atteints.
3. On considère un animal atteint d'insuffisance rénale, calculer la probabilité qu'il ait une insuffisance unilatérale.
4. Soit un animal atteint d'insuffisance rénale du rein droit. Calculer la probabilité que son insuffisance soit unilatérale.

PROBLÈME

Partie 1 Résultats préliminaires

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Vérifier que, pour tout entier $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \leq \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. (1)
   (a) En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$.
   (b) Déduire également des inégalités (1) un encadrement du reste défini par $R_n := \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ puis un équivalent de R_n quand n tend vers l'infini.
2. Justifier que pour tout entier $k \geq 2$: $\dfrac{1}{k^3} \leq \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k^2}$.
   En déduire la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{k^3}$ et la majoration : $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{n(n-1)}$.

Partie 2 Définition et encadrement de la constante d'Euler

On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

1. Montrer que $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$ quand n tend vers l'infini. Que peut-on en déduire quant aux variations de la suite (u_n) ?

2. On rappelle que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x > 0$, est convexe et que, comme telle, sa courbe représentative est en dessous de ses cordes.
   Montrer pour tout entier naturel k non nul l'encadrement : $\dfrac{1}{k+1} \leq \ln \dfrac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k+1}\right)$.(Il est vivement conseillé d'illustrer votre propos par un schéma)
3. En déduire que la suite (u_n) converge puis que, si l'on pose $\gamma = \lim u_n$, on a $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$.

Partie 3 Un calcul approché de γ

1. (a) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{2}{3}t^3 \leq \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t} \leq \dfrac{1}{2}t^2$.
   (b) En déduire un encadrement de $u_k - u_{k+1}$ pour $k \geq 2$.
   (c) Calculer $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} (u_k - u_{k+1})$ en fonction de u_n et de γ.
   (d) En utilisant les questions précédentes et les résultats de la première partie, montrer que :
   $$\forall n \geq 2,\ \frac{1}{2n} - \frac{2}{3n(n-1)} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$
2. On cherche à déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-6} près.
   - Quelle est, en vertu de l'encadrement précédent, la plus petite valeur n_0 de n telle que le calcul de u_n permette d'obtenir une telle valeur (on se contentera de donner un ordre de grandeur de n sous la forme d'une puissance de 10) ?
   - Ecrire un script MATLAB ou SCILAB permettant de déterminer n_0.
   - Exprimer en fonction de u_{n_0} une valeur approchée par défaut de γ à 10^{-6} près.

- fin -