Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°5 - A remettre le mardi 18 octobre 2011

« Un espace vectoriel de fonctions - Dérivées m-èmes - primitives »

Commençons par énoncer une définition qui fera l'objet d'un cours approfondi au mois de janvier prochain et dont nous aurons besoin en fin de devoir.

> <u>Définition :</u> (Intégrale généralisée convergente)
> Si f est une fonction réelle ou complexe, continue sur $[0,+\infty[$ dont l'intégrale sur le segment $[0,A]$ admet une limite finie L lorsque A tend vers $+\infty$, on dit que $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ est une intégrale généralisée convergente et l'on écrit :
> $$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = L = \lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\,\mathrm{d}x$$

Dans tout le problème, n est un entier naturel et E_n désigne l'ensemble des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)} = \overline{0} \tag{1}$$

où, $\overline{0}$ désigne la fonction nulle, $f^{(0)} = f$ et $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k ième de f.

Première partie

1. Montrer que E_n est un espace vectoriel.
2. Déterminer l'espace E_0.
   (a) Montrer que $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$.
   (b) En déduire que la fonction $W : x \mapsto e^{-x}$ est un élément de E_n.
3. f désignant une fonction indéfiniment dérivable quelconque, on désigne par g la fonction telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)e^x$.
   (a) Calculer $g^{(n)}(x)$.
   (b) En déduire l'équivalence suivante : $f \in E_n \Longleftrightarrow g^{(n)} = \overline{0}$.
   (c) En déduire que tout élément h de E_n est de la forme :

$$h : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k e^{-x} \end{array}\right.$$

Deuxième partie

Dans cette partie $n = 3$. On note

$$f_{a,b,c} : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (ax^2+bx+c)e^{-x} \end{array}\right.$$

1. On note $U = f_{1,0,0}$, $V = f_{0,1,0}$ et $W = f_{0,0,1}$.
   Montrer que la famille $\mathcal{B} = (U, V, W)$ est une base de E_3.

2. Montrer que l'application $\varphi : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E_3.

3. (a) Déterminer la matrice A de φ relativement à la base $\mathcal{B}$.

   (b) Montrer que $(A + I)^3 = 0$ (I désigne la matrice identité).

   (c) En déduire que A est inversible. Déterminer A^{-1}.

   (d) Que peut-on en déduire pour φ ?

   (e) Donner une primitive de $f_{a,b,c}$.

4. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer A^m. En déduire $f_{a,b,c}^{(m)}$.

5. Soit α un réel quelconque. On note $\mathcal{F}_\alpha$ le sous-ensemble de E_3 des fonctions $f_{a,b,c}$ qui admettent un extremum nul en α.

   (a) Prouver l'équivalence : $f_{a,b,c} \in \mathcal{F}_\alpha \iff f_{a,b,c} = a f_{1,-2\alpha,\alpha^2}$.

   (b) En déduire que $\mathcal{F}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de E_3. En donner une base et la dimension.

   (c) Montrer que tout élément de $\mathcal{F}_\alpha$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$.

   (d) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{1,2,1}(x)\mathrm{d}x$.

Troisième partie

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k e^{-x}$. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k k!$.