Mathématiques - 2 BCPST 1&2 - Lycée Michel Montaigne

DM N°4 - A remettre le mardi 11 octobre 2011

« Matrices magiques »

Soit n un entier supérieur ou égal à deux, E_n désigne l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et I_n la matrice unité de E_n.

- Une matrice de E_n est dite *symétrique* si elle est égale à sa transposée.
- Une matrice de E_n est dite *antisymétrique* si elle est égale à l'opposé de sa transposée.
- Une matrice de E_n de terme général $\alpha_{i,j}$ est dite *magique* si :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \sum_{k=1}^{n} \alpha_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,k} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{k,n+1-k}$$

- $\mathscr{A}_n$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques de E_n.
- $\mathscr{S}_n$ désigne l'ensemble des matrices symétriques de E_n.
- $\mathscr{G}_n$ désigne l'ensemble des matrices magiques de E_n.

Partie I : quelques généralités sur $\mathbf{A_n}$, $\mathbf{S_n}$ et $\mathbf{G_n}$

1. Montrer que $\mathscr{A}_n$ et $\mathscr{S}_n$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E_n.
2. Montrer que $\mathscr{G}_n$ est un sous-espace vectoriel de E_n.
3. On désigne par : p_n le projecteur de E_n sur $\mathscr{A}_n$ parallèlement à $\mathscr{S}_n$.
   q_n le projecteur de E_n sur $\mathscr{S}_n$ parallèlement à $\mathscr{A}_n$.
   Montrer que G_n est stable par p_n et par q_n.

Partie II : étude de $\mathscr{G}_3 \cap \mathscr{A}_3$ et $\mathscr{G}_3 \cap \mathscr{S}_3$

1. Déterminer toutes les matrices antisymétriques de $\mathscr{G}_3$.
2. Déterminer toutes les matrices symétriques de $\mathscr{G}_3$, après avoir déterminé celles dont la trace est nulle.
3. Justifier que $\mathscr{G}_3 \cap \mathscr{A}_3$ et $\mathscr{G}_3 \cap \mathscr{S}_3$ sont des sous-espaces supplémentaires de E_3.
4. Préciser –en justifiant correctement– les dimensions des espaces $\mathscr{G}_3 \cap \mathscr{A}_3$ et $\mathscr{G}_3 \cap \mathscr{S}_3$.

Partie III : étude de $\mathscr{G}_3$

Soient les matrices : $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad B = {}^t A, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que (A, B, C) est une base de $\mathscr{G}_3$.
2. Calculer A^2, B^2, C^2, $A\,C$, $B\,C$, $C\,A$ et $C\,B$.
   Montrer que $A\,B + B\,A \in \mathrm{Vect}(I_3, C)$.
3. Soient M et M' deux matrices magiques de E_3, on note (a, b, c) et (a', b', c') leurs coordonnées respectives dans la base (A, B, C).
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b, c) et (a', b', c') pour que le produit $M\,M'$ soit également une matrice magique.
   (b) En déduire toutes les matrices magiques qui s'écrivent comme produit de deux matrices magiques de E_3.
4. Montrer que le produit de toute matrice magique de E_3 par une combinaison linéaire de C et I_3 est encore une matrice magique.
5. Soit M une matrice magique ; montrer que les puissances paires de M ne sont pas magiques (sauf dans un cas particulier qu'on précisera) mais que les puissances impaires de M le sont.
6. À quelle(s) condition(s) une matrice magique M est-elle inversible ?
   – Calculer alors l'inverse de M.
   – Est ce que l'inverse de M est magique ?
   – Peut-on étendre aux exposants négatifs de M les résultats obtenus à la question précédente ?